MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 1
23.10.2019

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1\, e^{-x_2},$$
ist partiell differenzierbar (da die Koordinatenprojektionen $(x_1.x_2) \longmapsto x_1$ und $(x_1.x_2) \longmapsto x_2$ partiell diffbar und die e-Funktion diffbar sind, ist auch die Komposition und das Produkt diffbar) mit
$$\partial_1 f(x_1, x_2) = e^{-x_2}$$
und
$$\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1 \left(e^{-x_2} \cdot (-1)\right) = -x_1\, e^{-x_2}$$
für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Die Funktion
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin(x_1 \cdot x_2) + \cos(x_1^2 - x_2),$$
ist partiell differenzierbar (da die Koordinatenprojektionen $(x_1, x_2) \longmapsto x_1$ und $(x_1, x_2) \longmapsto x_2$ partiell diffbar sind, ist auch deren Produkt bzw. Differenz partiell diffbar, und weil sin und cos diffbar, sind also auch die Funktionen $x \longmapsto \sin(x_1 \cdot x_2)$ und $x \longmapsto \cos(x_1^2 - x_2)$ und damit auch die Summe partiell diffbar) mit
$$\partial_1 g(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2) \cdot x_2 - \sin(x_1^2 - x_2) \cdot 2x_2$$
und
$$\partial_2 g(x_1, x_2) = \cos(x_1 \cdot x_2) \cdot x_1 + \sin(x_1^2 - x_2)$$
für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Die Funktion
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x, y) = x^3 y^2 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4 + 1}} \;=\; x^3 y^2 - x + x \cdot (x^2 + y^4 + 1)^{-\frac{1}{2}},$$
ist partiell differenzierbar (setzt sich aus Produkt, Summe und Quotient der partiell diffbaren Koordinatenfunktionen und der konstanten Funktion sowie aus Komposition mit der auf $]0, \infty[$ diffbaren Wurzelfunktion zusammen) mit
$$\partial_1 h(x, y) = 3x^2 y^2 - 1 + (x^2 + y^4 + 1)^{-\frac{1}{2}} - x\, \frac{1}{2} (x^2 + y^4 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$
und
$$\partial_1 h(x, y) = 2x^3 y - x\, \frac{1}{2} (x^2 + y^4 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4y^3$$

2. Wir haben eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf der Einheitskreislinie
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$
zu betrachten und zu zeigen, daß f weder surjektiv noch injektiv sein kann.

<u>Wir zeigen: f ist nicht surjektiv:</u>

Da $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und f stetig, ist nach dem Satz von Weierstraß $f(D) \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Also gilt $f(D) \neq \mathbb{R}$, und damit kann f nicht surjektiv sein.

Wir zeigen: f ist nicht injektiv:

Wir betrachten auf D die beiden verschiedenen Punkte $(1,0)$ und $(-1,0)$: im Fall $f(1,0) = f(-1,0)$ ist f nicht injektiv, und ansonsten können wir ohne Einschränkung $f(1,0) > f(-1,0)$ annehmen, so daß für den Mittelwert

$$m = \frac{f(1,0) + f(-1,0)}{2} \qquad \text{dann} \qquad f(1,0) > m > f(-1,0)$$

gilt. Wir wählen nun für die Einheitskreislinie D die Parametrisierung

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)\,.$$

Damit ist die Funktion

$$h = f \circ \varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

als Verknüpfung der stetigen Funktionen $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $W_\varphi = D$ selbst stetig, und es gilt

$$h(0) = f(\varphi(0)) = f(1,0) \qquad \text{und} \qquad h(2\pi) = f(\varphi(2\pi)) = f(1,0)$$

sowie

$$h(\pi) = f(\varphi(\pi)) = f(-1,0),$$

also

$$h(0) > m > h(\pi) \qquad \text{sowie} \qquad h(\pi) < m < h(2\pi).$$

Folglich existiert für die Funktion h nach dem Zwischenwertsatz eine Stelle $\xi_1 \in \,]0, \pi[$ mit $h(\xi_1) = m$ und eine Stelle $\xi_2 \in \,]\pi, 2\pi[$ mit $h(\xi_2) = m$; damit ist aber $(p_1, q_1) = \varphi(\xi_1)$ ein Punkt von D oberhalb der x–Achse mit

$$f(p_1, q_1) = f(\varphi(\xi_1)) = h(\xi_1) = m$$

sowie $(p_2, q_2) = \varphi(\xi_2)$ ein Punkt von D unterhalb der x–Achse ebenfalls mit

$$f(p_2, q_2) = f(\varphi(\xi_2)) = h(\xi_2) = m.$$

Da nun (p_1, q_1) und (p_2, q_2) zwei verschiedene Punkte auf D mit $f(p_1, q_1) = f(p_2, q_2)$ sind, kann f nicht injektiv sein.

3. Sei $r > 0$. S_r ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, also nimmt die stetige Funktion f nach dem Satz von Weierstraß f (auf S_r) ihr Maximum an.

   Wir suchen die Kandidaten für globale Extremstellen von f, und vergleichen anschließend die Funktionswerte der Kandidaten in einer Wertetabelle.

   Dazu parametrisieren wir S_r durch

$$\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (r\cos t, r\sin t).$$

   Die Funktionswerte von f auf S_r sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(r\cos t, r\sin t) = r^2\cos^2 t + r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

   h ist differenzierbar mit

$$\begin{aligned} h'(t) &= -2r^2\cos t \cdot \sin t + r\cos t \;=\; r\cos t \cdot (-2r\sin t + 1) = 0 \\ &\iff \cos t = 0 \quad \vee \quad r\sin t = \frac{1}{2} \\ &\overset{t\in[0,2\pi]}{\iff} t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \qquad \text{oder}\ \ t \in [0, 2\pi]\ \text{mit}\ \sin t = \frac{1}{2r}. \end{aligned}$$

Wir treffen nun die Fallunterscheidung

<u>1. Fall</u>: $0 < r \leq \frac{1}{2}$

Dann ist für $r < \frac{1}{2}$ also $\frac{1}{2r} > 1$, also gibt es kein $t \in [0, 2\pi]$ mit $\sin t = \frac{1}{2r}$.
Für $r = \frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{2r} = 1$ und $\sin t = 1 \Longleftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$.
Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also $t = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi$.
$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf S_r sind also

$$(x,y) = \underbrace{(r,0)}_{\varphi(0)}\ ,\ \underbrace{(0,r)}_{\varphi(\frac{\pi}{2})}\ ,\ \underbrace{(0,-r)}_{\varphi(\frac{3\pi}{2})}\ ,\ \underbrace{(r,0)}_{\varphi(2\pi)}$$

Wir vergleichen die Funktionswerte der Kandidaten in einer Wertetabelle:

(x,y)	$(r,0)$	$(0,r)$	$(0,-r)$
$f(x,y)$	r^2	r	$-r$

Wegen $0 < r \leq \frac{1}{2}$ ist $-r < r^2 < r$, also hat f also das Maximum r (angenommen im Punkt $(0,r)$).

<u>2. Fall</u>: $r > \frac{1}{2}$

Dann ist für $0 < \frac{1}{2r} < 1$, also gibt es in $[0, 2\pi]$ genau 2 Lösungen von $\sin t = \frac{1}{2r}$.
Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad 2\pi \quad \text{ und } \ t \in [0, 2\pi] \text{ mit } \sin t = \frac{1}{2r}.$$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf S_r sind also

$$(x,y) = \underbrace{(r,0)}_{\varphi(0)}\ ,\ \underbrace{(0,r)}_{\varphi(\frac{\pi}{2})}\ ,\ \underbrace{(0,-r)}_{\varphi(\frac{3\pi}{2})}\ ,\ \underbrace{(r,0)}_{\varphi(2\pi)} \quad \text{ und } \ (r\cos t, r\sin t) \ \text{ für } \ t \in [0, 2\pi] \text{ mit } \sin t = \frac{1}{2r}.$$

Wir vergleichen die Funktionswerte der Kandidaten in einer Wertetabelle:

(x,y)	$(r,0)$	$(0,r)$	$(0,-r)$	$(r\cos t, r\sin t)$ mit $\sin t = \frac{1}{2r}$
$f(x,y)$	r^2	r	$-r$	$r^2 + \frac{1}{4}$

Auf den letzten Funktionswert kommt man wie folgt:
Für $\sin t = \frac{1}{2r}$ ist

$$\begin{aligned} f(r\cos t, r\sin t) &= f\Big(r\cos t, \frac{1}{2}\Big) = r^2\cos^2 t + \frac{1}{2} \overset{\cos^2 t = 1 - \sin^2 t}{=} r^2(1 - \sin^2 t) + \frac{1}{2} \\ &= r^2\Big(1 - \frac{1}{4r^2}\Big) + \frac{1}{2} \ = \ r^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ = \ r^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wegen $r \neq \frac{1}{2}$ ist $r < r^2 + \frac{1}{4}$, also hat f das Maximum $r^2 + \frac{1}{4}$ (angenommen in den zwei Punkten $(r\cos t, r\sin t)$ mit $\sin t = \frac{1}{2r}, t \in [0, 2\pi]$).

4. Wir zerlegen, wie im Beipiel aus der Vorlesung, D in Kurven

$$X_c := \{(x,y) \in D | \ x + y = c\}, \quad c \geq 0,$$

bestimmen das Maximum von f <u>auf X_c</u> und bilden dann das Supremum (Maximum) der Kurvenmaxima.

Sei nun $c > 0$. Wir parametrisieren X_c für $c > 0$ durch

$$\varphi : [0, c] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, c - t).$$

Die Funktionswerte von f auf X_c sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t, c - t) \;=\; e^{-c} \cdot (t^2 + (c - t)^2) = e^{-c} \cdot (2t^2 - 2tc + c^2), \quad t \in [0, c].$$

h ist differenzierbar mit

$$h'(t) = e^{-c} \cdot (4t - 2c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{c}{2}.$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h auf $[0, c]$ sind also $\quad t = 0,\ \frac{c}{2},\ c.$
$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf X_c sind also

$$(x, y) = \underbrace{(0, c)}_{\varphi(0)} \;,\; \underbrace{\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)}_{\varphi(\frac{c}{2})} \;,\; \underbrace{(c, 0)}_{\varphi(c)}.$$

Aus der folgenden Tabelle

(x, y)	$(0, c)$	$(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$	$(c, 0)$
$f(x, y)$	$e^{-c} \cdot c^2$	$e^{-c} \cdot \frac{c^2}{2}$	$e^{-c} \cdot c^2$

erkennt man, daß f auf X_c (nur) in den Punkten $(0, c)$ und $(c, 0)$ den Maximalwert $e^{-c} \cdot c^2$ annimmt.
Wir betrachten nun also die Funktion

$$M : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad M(c) = e^{-c} \cdot c^2.$$

Diese Funktion beschreibt das Maximum von f auf X_c; auch für $c = 0$, denn dann ist $X_0 = \{(0, 0)\}$ und $M(0) = 0 = f(0, 0)$.
M ist differenzierbar mit

$$M'(c) = -e^{-c} c^2 + e^{-c} 2c \;=\; e^{-c}(2c - c^2) \;=\; e^{-c} \cdot c \cdot (2 - c) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 0 \,\vee\, c = 2.$$

Ferner ist

$$M'(c) \begin{cases} > 0\,, & \text{für } c \in]0, 2[\quad \Longrightarrow f \text{ ist streng mon. wachsend auf } [0, 2] \\ = 0\,, & \text{für } c = 2 \\ < 0\,, & \text{für } c \in]2, \infty[\quad \Longrightarrow f \text{ ist streng mon. fallend auf } [2, \infty[\end{cases},$$

also hat M in $c = 2$ das globale Maximum $M(2) = 4e^{-2}$, also ist $4e^{-2}$ das globale Maximum von f (angenommen in den Punkten $(0, 2)$ und $(2, 0)$). f hat also ein globales Maximum, was nicht selbstverständlich ist, da D nicht kompakt ist.
Es ist also

$$\sup\{f(x, y) \;:\; (x, y) \in D\} \;=\; \max\{f(x, y) \;:\; (x, y) \in D\} \;=\; 4e^{-2}.$$